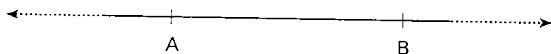
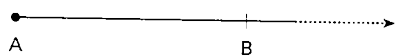
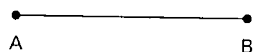
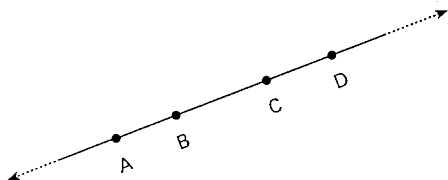
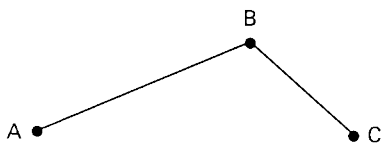
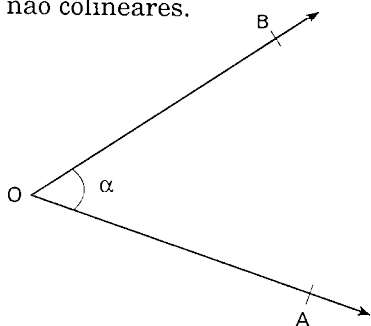
13 Noções de Geometria Plana

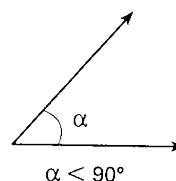
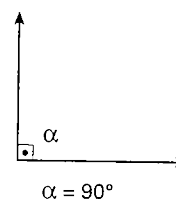
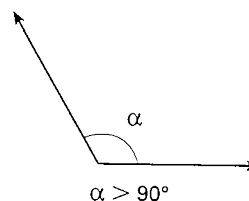
- *Reta* determinada pelos pontos A e B.
  Indica-se: $\overleftrightarrow{AB}$

- *Semi-reta* de origem no ponto A e que passa pelo ponto B.
  Indica-se: $\overrightarrow{AB}$

- *Segmento* de reta de extremidades A e B.
  Indica-se: $\overline{AB}$

- *Pontos colineares* ou *alinhados* são pontos que pertencem à mesma reta.
  Exemplo: Os pontos A, B, C, D, ... da figura

- *Dois segmentos consecutivos* são dois segmentos de extremidade comum.
  Exemplo: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ da figura:

- *Ângulo* é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Nomenclatura:

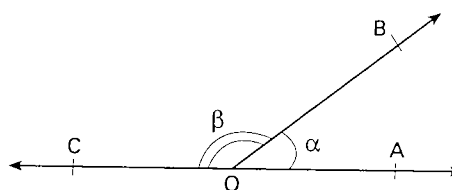
O ...... vértice

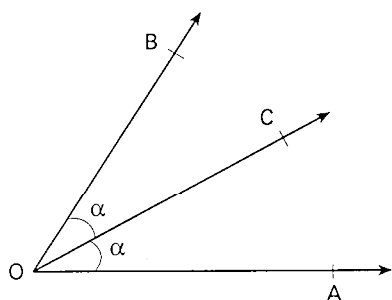
$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ ...... lados

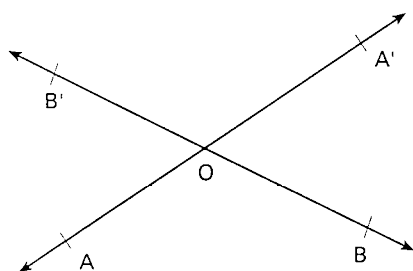
∢ AOB ...... ângulo

$A\hat{O}B = \alpha$ ...... medida em graus

- *Ângulo agudo*

- *Ângulo reto*

- *Ângulo obtuso*

- *Dois ângulos adjacentes* são dois ângulos de mesmo vértice que têm um lado comum e os outros dois lados são semi-retas opostas.

Exemplo: Os ângulos AOB e BOC de medidas α e β são ângulos adjacentes.

- *Bissetriz de um ângulo* é a semi-reta de origem no vértice desse ângulo que determina dois ângulos consecutivos de mesma medida.

Exemplo: Na figura a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AOB.

- *Ângulos opostos pelo vértice* são ângulos de vértice comum e os lados de um deles são semi-retas opostas aos lados do outro.

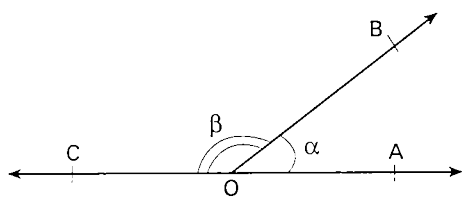
Exemplo: Na figura os ângulos AOB e A'OB' são opostos pelo vértice.

- *Dois ângulos complementares* são dois ângulos cujas medidas somam 90°.

Exemplo: 30° e 60°.

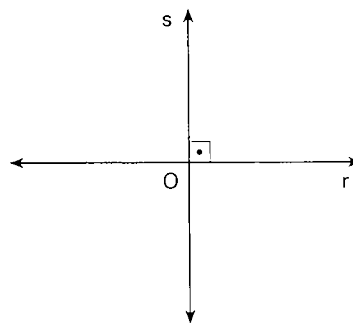
- *Dois ângulos suplementares* são dois ângulos cujas medidas somam 180°.

Exemplo: 80° e 100°.

- *Dois ângulos adjacentes* são suplementares.

Exemplo: Os ângulos adjacentes AOB e BOC conforme figura.

$\alpha + \beta = 180°$

- *Retas perpendiculares entre si* são duas retas concorrentes que formam ângulo reto.

Exemplo: As retas r e s da figura são perpendiculares.

▪ *Ângulos*

SÉRIE I

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 35°
2) 40°
3) 60°
4) 75°

Exemplo: 20°
Devemos ter: 90° – 20° = 70°
***Resp.:* 70°**

SÉRIE II

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 70°
2) 95°
3) 60°
4) 135°

Exemplo: 50°
Devemos ter: 180° – 50° = 130°
***Resp.:* 130°**

SÉRIE III

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 43°25'
2) 61°13'
3) 72°47'
4) 83°09'

Exemplo: 37°14'

***1º passo:* Algoritmo 90° − 37°14'**

***2º passo:* 1° corresponde a 60'.**

***3º passo:* 90° = 89°60'.**

***4º passo:* Preparar e calcular:** **89°60' − 37°14' = 52°46'**

***Resp.:* 52°46'**

SÉRIE IV

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

1) 43°25'18"
2) 61°13'27"
3) 72°47'13"
4) 83°09'52"

Exemplo: 37°14'36"

1º passo: **1' corresponde a 60"**

2º passo: **Preparar e calcular:**

90°	89°60'	89°59'60"
−37°14'36"	**−37°14'36"**	**−37°14'36"**
		52°45'24"

Resp.: **52°45'24"**

SÉRIE V

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 73°28'
2) 85°36'
3) 100°12'
4) 147°41'

Exemplo: 37°46'

Devemos ter:

180°	179°60'
− 37°46'	**− 47°46'**
	132°14'

Resp.: **132°14'**

SÉRIE VI

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

1) 73°28'47"
2) 85°26'19"
3) 100°12'32"
4) 147°41'08"

Exemplo: 37°46'38"

Devemos ter:

180°	179°60'	179°59'60"
− 37°46'38"	**− 37°46'38"**	**− 37°46'38"**
		142°13'22"

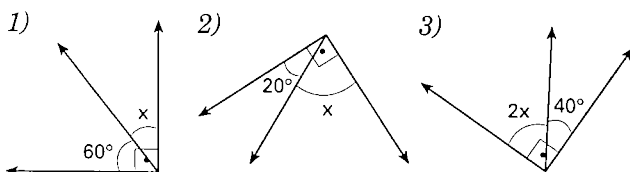
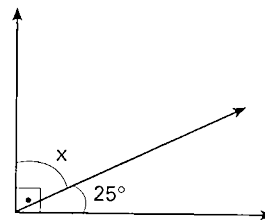
Resp.: **142°13'22"**

SÉRIE VII

Em cada figura calcular o valor de x:

1)

2)

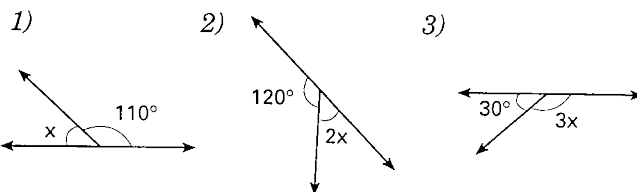
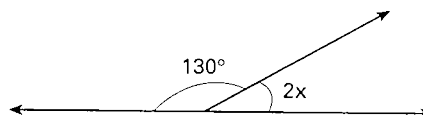
3)

Exemplo:

Os ângulos sendo adjacentes e complementares, devemos ter:

x + 25° = 90° ∴ x = 90° − 25° ∴ x = 65°

Resp.: **x = 65°**

SÉRIE VIII

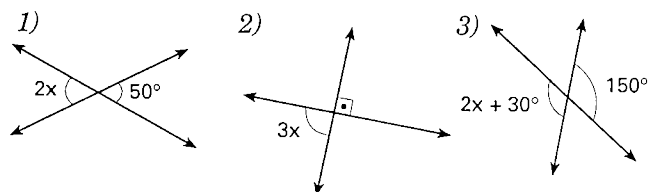
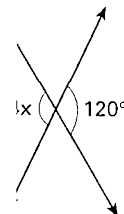
Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Os ângulos sendo adjacentes e suplementares, devemos ter:

2x + 130° = 180° ∴ 2x = 180° − 130° ∴
∴ 2x = 50° ∴ x = 25°

Resp.: **x = 25°**

SÉRIE IX

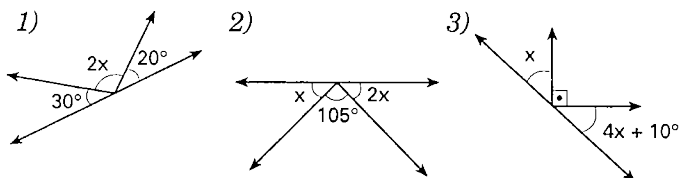
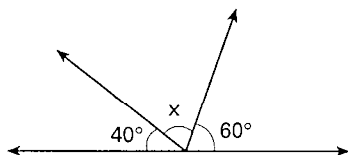
Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Os ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.

Daí, 4x = 120° ∴ $x = \frac{120°}{4}$ ∴ x = 30°

Resp.: **x = 30°**

SÉRIE X

Em cada figura calcular o valor de x:

Exemplo:

Devemos ter:

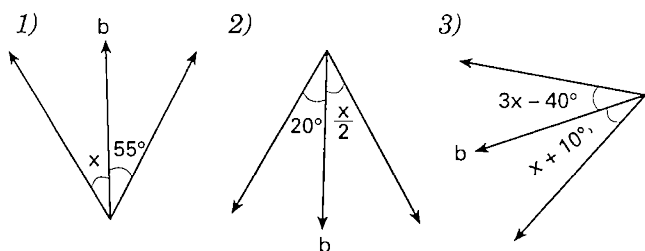
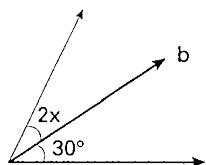
$40° + x + 60° = 180° \therefore$

$\therefore\ x + 100° = 180° \therefore\ x = 180° - 100°$

$\therefore\ x = 80°$

***Resp.:* $x = 80°$**

SÉRIE XI

Em cada figura, a semi-reta b é bissetriz do ângulo; calcular o valor de x:

Exemplo:

Devemos ter:

$2x = 30° \therefore\ x = \frac{30°}{2} \therefore\ x = 15°$

***Resp.:* $x = 15°$**

SÉRIE XII

Resolva os problemas:

1) Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 40°. Achar as medidas dos ângulos.

2) Dois ângulos são complementares e a medida de um deles é o dobro da medida do outro. Quais são as medidas dos ângulos?

3) Dois ângulos são complementares e a razão das medidas é $\frac{3}{7}$. Achar as medidas dos ângulos.

Exemplo: Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 20°. Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 20° \end{cases}$$

$$2x = 110° \therefore\ x = \frac{110°}{2} \therefore\ x = 55°$$

Substituindo x = 55° na primeira equação, vem:

$55° + y = 90° \therefore\ y = 90° - 55° \therefore\ y = 35°$

Resp.: 35° e 55°

SÉRIE XIII

Resolver os problemas:

1) Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao dobro da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.

2) Dois ângulos são suplementares e a medida de um excede a do outro de 70°. Quais são as medidas dos ângulos?

3) Dois ângulos são suplementares e a razão das medidas é 3/7. Quais são as medidas dos ângulos?

Exemplo: Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao triplo da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 180° & (1) \\ x = 3y & (2) \end{cases}$$

Substituir (2) em (1), temos:

$3y + y = 180° \therefore\ 4y = 180° \therefore$

$$\therefore\ y = \frac{180°}{4} \therefore\ y = 45°$$

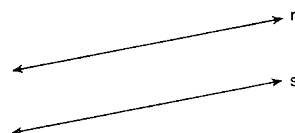
Substituindo y = 45° em (2), vem:

$x = 3 \cdot 45° \therefore\ x = 135°$

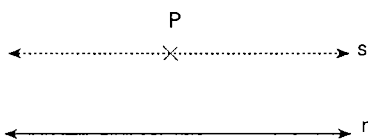
***Resp.:* 45° e 135°**

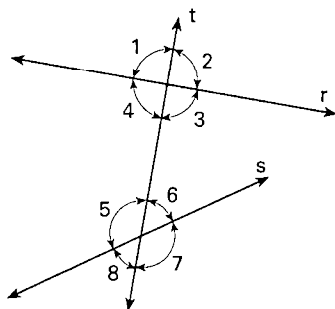
▪ *Retas paralelas*

a) Definição: Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, são coplanares e não têm ponto comum.

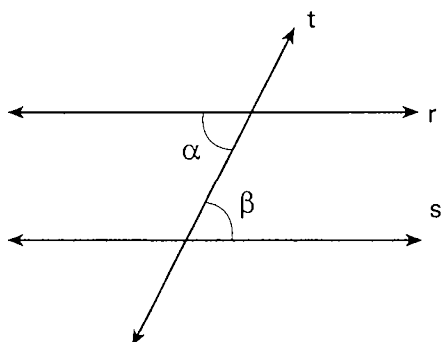
Indica-se: $r \,//\, s$ e $r \neq s$

> **➡ Nota**
>
> Retas coplanares são retas de um mesmo plano.

b) Postulado das paralelas (Euclides)

Por um ponto fora de uma reta, existe uma e apenas uma reta paralela à reta dada.

c) Duas retas interceptadas por uma transversal

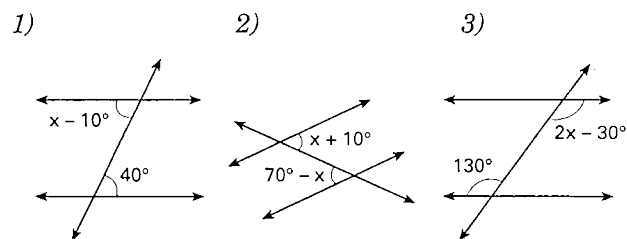
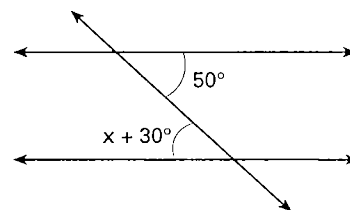
Na figura, as retas r e s são interceptadas por uma reta transversal.

Nomenclatura:

- ângulos alternos internos $\begin{cases} \hat{3} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{6} \end{cases}$
- ângulos alternos externos $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{cases}$
- ângulos correspondentes $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{5} & \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} & \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$
- ângulos colaterais internos $\begin{cases} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{cases}$
- ângulos colaterais externos $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$

d) Propriedade

$\left.\begin{array}{l} r \,//\, s, \ r \neq s \\ \textbf{t é transversal} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

SÉRIE I

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

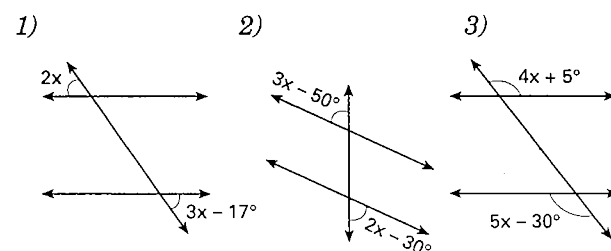
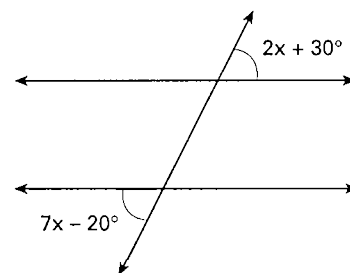
Devemos ter os ângulos alternos internos de medidas iguais:

$x + 30° = 50° \ \therefore \ x = 50° - 30° \ \therefore \ 20°$

Resp.: **x = 20°**

SÉRIE II

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter os ângulos alternos externos de medidas iguais:

$\mathbf{7x - 20° = 2x + 30° \ \therefore}$

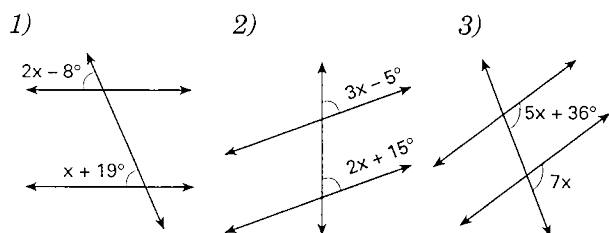
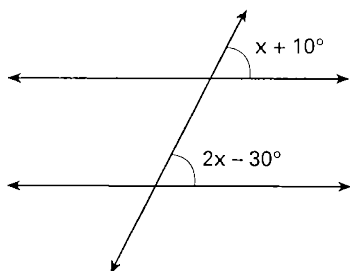
$\mathbf{\therefore \ 7x - 2x = = 30° + 20° \ \therefore}$

$\mathbf{\therefore \ 5x = 50° \ \therefore \ x = 10°}$

Resp.: **x = 10°**

SÉRIE III

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

1) 2) 3)

Exemplo:

Devemos ter os ângulos correspondentes de medidas iguais:

$2x - 30° = x + 10° \therefore$

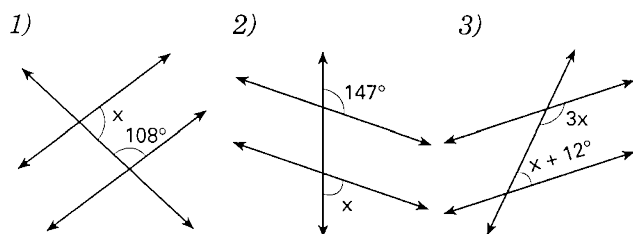
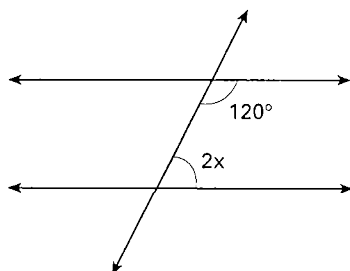
$\therefore 2x - x = 10° + 30° \therefore$

$\therefore x = 40°$

Resp.: **x = 40°**

SÉRIE IV

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:

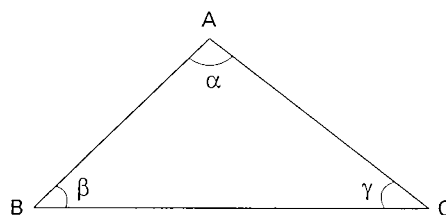
1) 2) 3)

Exemplo:

Os ângulos colaterais internos são suplementares. Devemos ter:

$2x + 120° = 180° \therefore 2x = 180° - 120° \therefore$

$\therefore 2x = 60° \therefore x = 30°$

Resp.: **x = 30°**

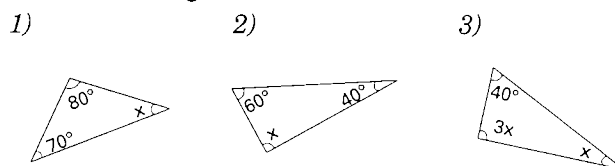
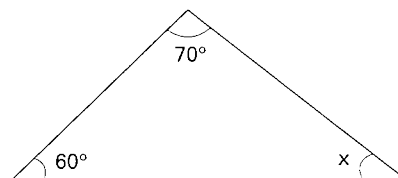
▪ *Triângulos*

P.1) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

No triângulo ABC da figura, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

SÉRIE I

Em cada triângulo calcular o valor de x:

1) 2) 3)

Exemplo:

Devemos ter:

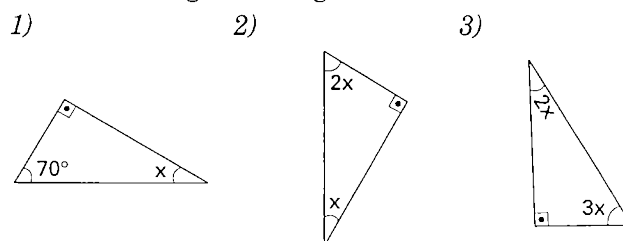
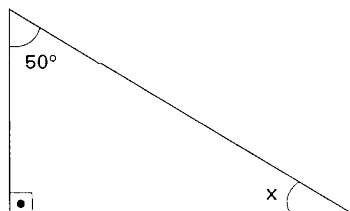
$x + 60° + 70° = 180° \therefore x + 130° =$

$= 180° \therefore x = 180° - 130° \therefore x = 50°$

Resp.: **x = 50°**

SÉRIE II

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) 2) 3)

Exemplo:

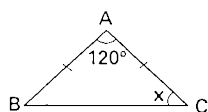
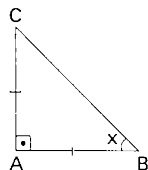
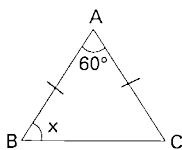
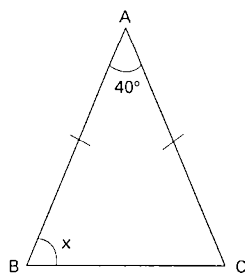
Devemos ter:

$x + 50° = 90° \therefore x = 90° - 50° \therefore x = 40°$

Resp.: **x = 40°**

SÉRIE III

Em cada triângulo isósceles AB = AC, calcular o valor de x:

1)

2)

3)

Exemplo:

Num triângulo isósceles, os ângulos da base (lado desigual) têm medidas iguais.

Devemos ter:

$\hat{B} = \hat{C} = x$ e

portanto :

$x + x + 40° = 180° \therefore 2x = 180° - 40° \therefore$

$\therefore 2x = 140° \therefore x = 70°$

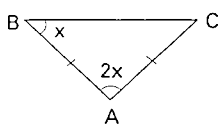
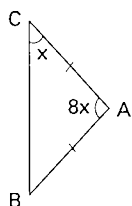
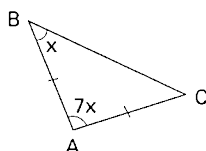
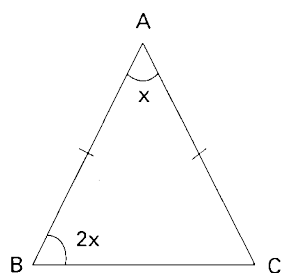
***Resp.:* x = 70°**

SÉRIE IV

Em cada triângulo isósceles (AB = AC), calcular o valor de x:

1)

2)

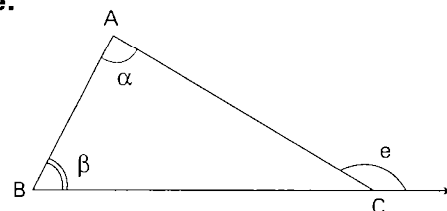
3)

Exemplo:

Devemos ter: $\hat{B} = \hat{C} = 2x$ **e portanto**

$x + 2x + 2x = 180° \therefore 5x = 180° \therefore$

$x = \dfrac{180°}{5} \therefore$

$\therefore x = 36°$

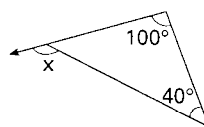
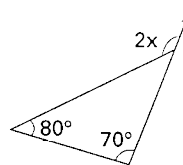
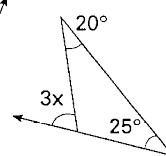
***Resp.:* x = 36°**

P.2) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

No triângulo ABC da figura, temos:

$$\hat{e} = \alpha + \beta$$

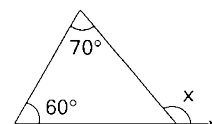
SÉRIE V

Em cada triângulo calcular o valor de x:

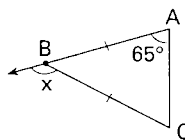
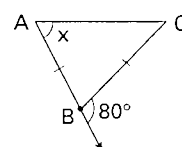
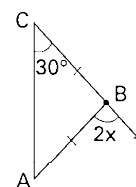
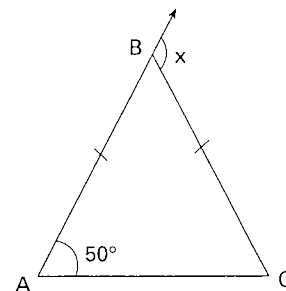
1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter:

$x = 60° + 70° \therefore x = 130°$

***Resp.:* x = 130°**

SÉRIE VI

Em cada figura o triângulo ABC é isósceles (AB = BC). Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Devemos ter:

1) $\hat{A} = \hat{C} = 50°$

2) $x = 50° + 50°$

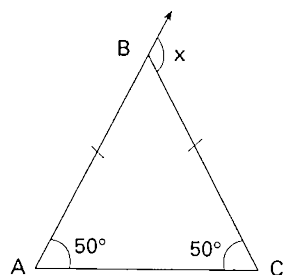
$\therefore\ x = 100°$

SÉRIE VII

Em cada figura AB = BC, calcular o valor de x:

1)

2)

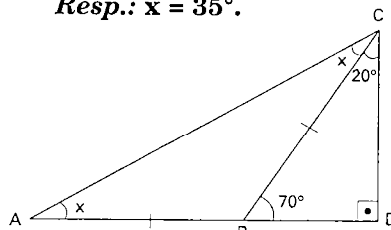
3)

Exemplo:

1. ΔBCD **é retângulo,** $\hat{B} = 70°$

2. ΔABC **é isósceles, pois AB = BC, então** $\hat{A} = \hat{C} = x$ **.**

3. $\sphericalangle\ C\hat{B}D$ **é externo no** ΔABC**, então:**

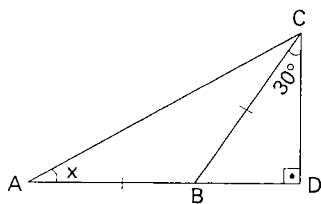
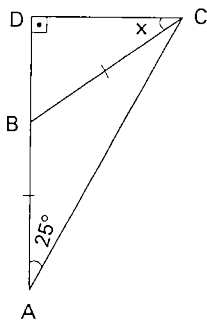
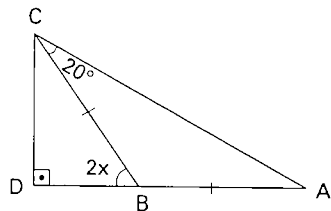
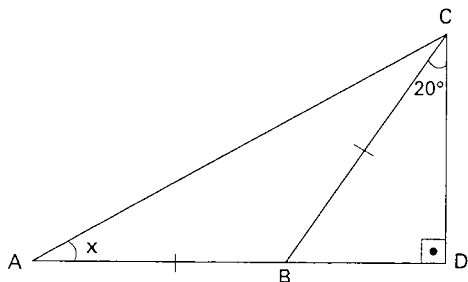
$x + x = 70°\ \therefore\ 2x = 70°\ \therefore\ x = 35°$

Resp.: **x = 35°.**

SÉRIE VIII

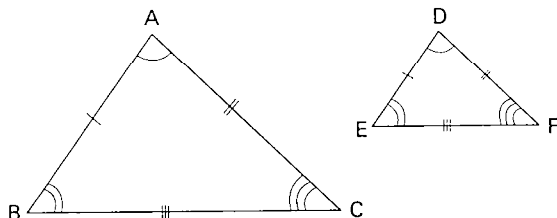
Em cada figura as retas r e s são paralelas. Calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

$x = 60° + 30°\ \therefore\ x = 90°$

14 Semelhança de Triângulos

1. Preliminares

Considere os triângulos ABC e DEF

e sejam as correspondências vértice a vértice a seguir indicadas:

A ↔ D, B ↔ E e C ↔ F.

Ângulos correspondentes:

$\sphericalangle A \leftrightarrow \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \leftrightarrow \sphericalangle E$ e $\sphericalangle C \leftrightarrow \sphericalangle F$.

Lados correspondentes:

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$ e $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$.

2. Definição

Dois triângulos que têm os *ângulos correspondentes* com medidas iguais e os *lados correspondentes* com *medidas proporcionais* são chamados *triângulos semelhantes.*

Assim, de acordo com as considerações acima, se

$\hat{A} = \hat{D}$

$\hat{B} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, por definição os triângulos

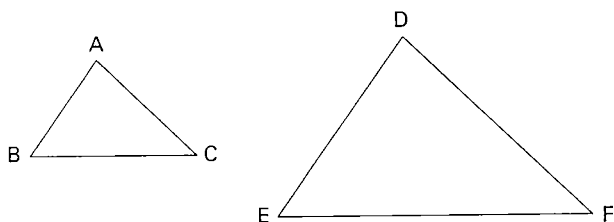
$\hat{C} = \hat{F}$

ABC e DEF são semelhantes.

Indica-se: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Observe que: aos lados correspondentes se opõem os ângulos correspondentes de medidas iguais.

SÉRIE I

Dados: Δ ABC ~ Δ DEF
AB, BC, AC e DE.
Calcular: DF e EF.

1) AB = 6 cm, BC = 8 cm, AC = 10 cm e DE = 3 cm.
2) AB = 4 cm, BC = 5 cm, AC = 6 cm e DE = 12 cm.
3) AB = 13 cm, BC = 11 cm, AC = 9 cm e DE = 39 cm.

Exemplo: AB = 5 cm, BC = 7 cm, AC = 9 cm, e DE = 10 cm.

Resolução:

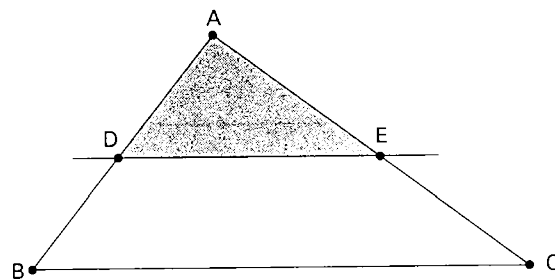
Devemos ter:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \therefore \frac{5}{10} = \frac{7}{EF} = \frac{9}{DF}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{9}{DF} = \frac{1}{2} \therefore DF = 18\,cm \\ \frac{7}{EF} = \frac{1}{2} \therefore EF = 14\,cm \end{cases}$$

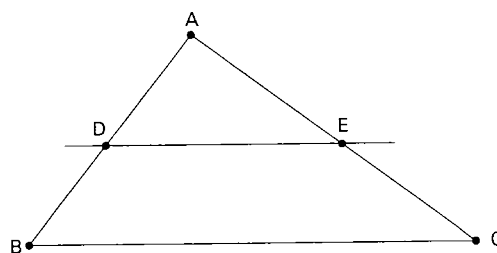
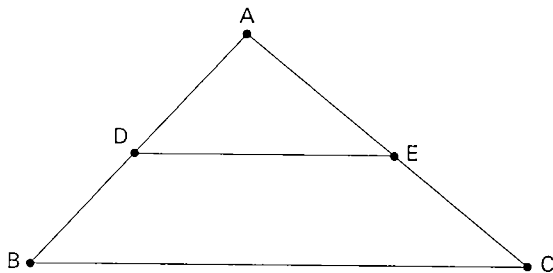
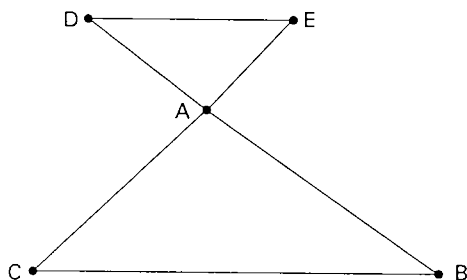
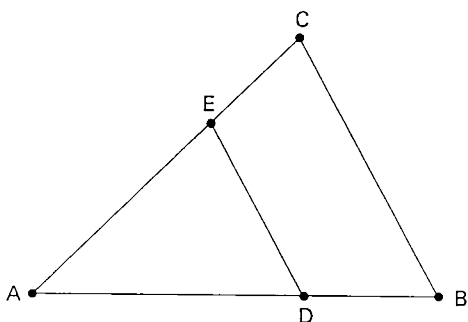
3. Propriedade

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que encontra as retas suportes dos outros dois lados em pontos distintos determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro triângulo.

Na figura, a reta $\overleftrightarrow{DE}$ sendo paralela ao lado $\overline{BC}$ do ΔABC, então o ΔADE é semelhante ao ΔABC.

Em símbolos:

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC.$

SÉRIE II

Dados $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ no ΔABC.
AB, BC, AC e AD.
Calcular: DE e AE.

1) AB = 8 cm, BC = 10 cm
AC = 12 cm e AD = 4 cm

2) AB = 14 cm, BC = 12 cm
AC = 10 cm e AD = 7cm

3) AB = 16 cm, AC = 20 cm
BC = 12 cm e AD = 12 cm

Exemplo: AB = 18 cm, BC = 15 cm
AC = 12 cm e AD = 12 cm

Resolução:

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$

$\therefore \dfrac{12}{18} = \dfrac{DE}{15} = \dfrac{AE}{12}$

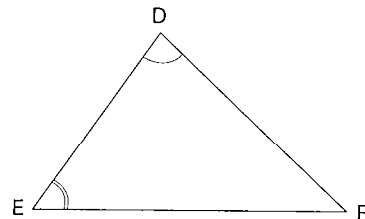
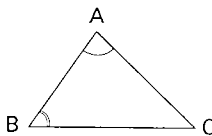
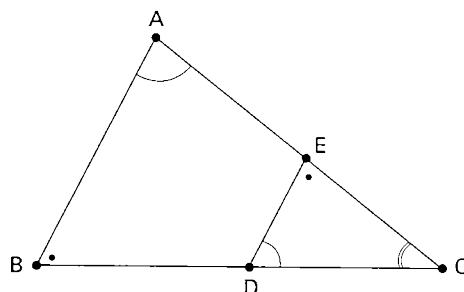
$\therefore \begin{cases} \dfrac{DE}{15} = \dfrac{2}{3} \therefore DE = 10\,cm \\ \dfrac{AE}{12} = \dfrac{2}{3} \therefore AE = 8\,cm \end{cases}$

4. Propriedade

Dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes de medidas iguais são semelhantes.

Na figura, sendo $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Em símbolos:

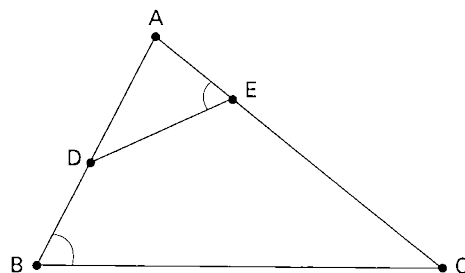
$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

Exemplo: Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$,
AB = 8 cm, BC = 10 cm,
AC = 12 cm e DE = 4 cm.
Calcular: CD e EC

Resolução:

$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \text{ (dado)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (comum)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEC$

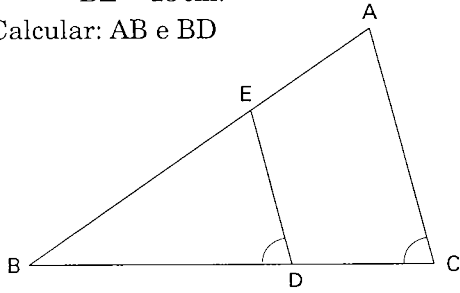
$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{AC}{DC} \quad \therefore \dfrac{8}{4} = \dfrac{10}{EC} = \dfrac{12}{DC}$

$\therefore \begin{cases} \dfrac{10}{EC} = \dfrac{2}{1} \therefore EC = 5\,cm \\ \dfrac{12}{DC} = \dfrac{2}{1} \therefore DC = 6\,cm \end{cases}$

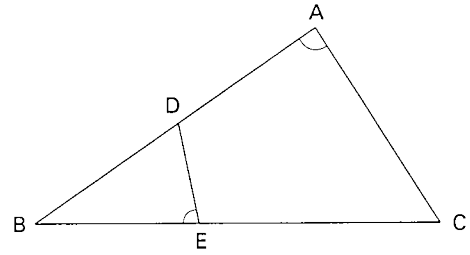
Exercícios

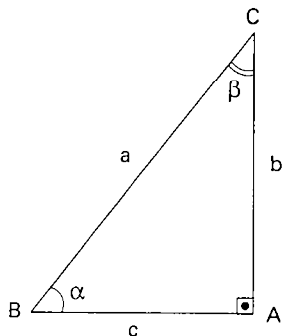
1) Dados ΔABC, segmento $\overline{DE}$, $\hat{B} = \hat{E}$,
AB = 15 cm, AC = 21 cm,
BC = 18 cm e DE = 6 cm.
Calcular: AD e AE

2) Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$,

$\hat{D} = \hat{C}$, AC = 15 cm
BC = 36 cm, DE = 5 cm
BE = 13 cm.

Calcular: AB e BD

3) Dados: ΔABC, segmento $\overline{DE}$,

AB = 24 cm, AC = 10 cm,
BD = 13 cm e BE = 12 cm.

Calcular: BC e DE.

15 Razões Trigonométricas

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, representado na figura abaixo.

Nomenclatura:

1. *a* é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$.
2. *b* é a medida do cateto $\overline{AC}$.
3. *c* é a medida do cateto $\overline{AB}$.
4. α e β são as medidas dos ângulos agudos de vértices B e C.
5. As medidas α e β são complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90°$.
6. O cateto de medida *b* está *oposto* ao ângulo de vértice B.
7. O cateto de medida *c* está *oposto* ao ângulo de vértice C.
8. O cateto de medida *b* é *adjacente* ao ângulo de vértice C.
9. O cateto de medida *c* é *adjacente* ao ângulo de vértice B.
10. A hipotenusa de medida *a* está oposta ao ângulo de vértice A (ângulo reto).

Teorema de Pitágoras

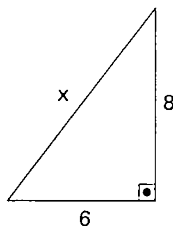
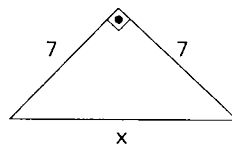
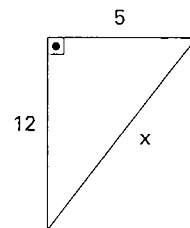
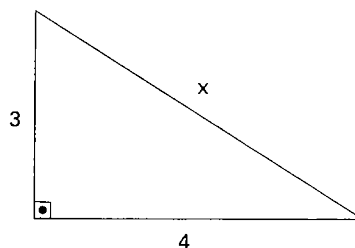
> Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

No triângulo ABC, retângulo em A, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

SÉRIE I

Em cada triângulo retângulo calcular a medida x da hipotenusa.

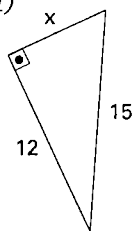
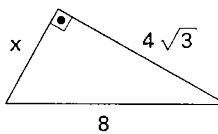
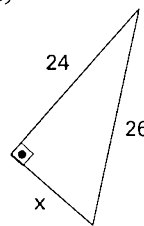
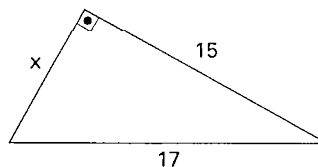
1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução:

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \therefore x = \sqrt{25}$

$\therefore$ **x = 5**

SÉRIE II

Em cada triângulo calcular a medida x do cateto.

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução:

$x^2 + 15^2 = 17^2 \therefore x^2 = 289 - 225 = 64$

$\therefore x = \sqrt{64} \therefore$ **x = 8**

Definições:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

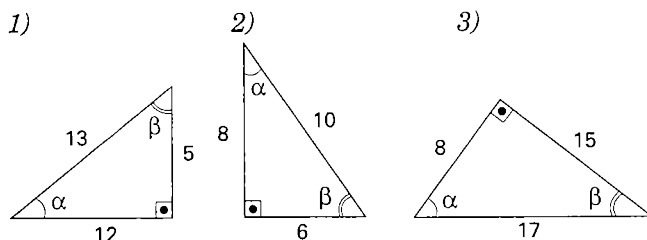
$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} = \frac{c}{b}$$

SÉRIE III

Em cada triângulo retângulo calcular o seno, o co-seno e a tangente de cada ângulo:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução: $\textbf{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$

$\textbf{sen } \beta = \frac{3}{5}$ $\cos \beta = \frac{4}{5}$ $\text{tg } \beta = \frac{3}{4}$

TABELA

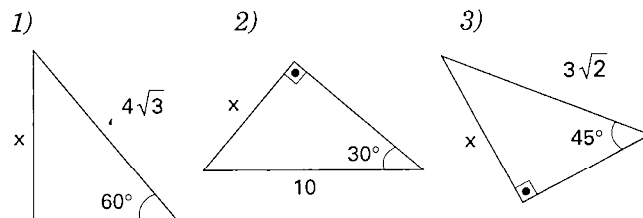
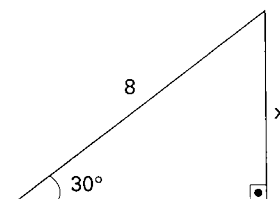
$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg } 45° = 1$
$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$	$\text{sen } 90° = 1$ $\cos 90° = 0$ $\text{tg } 90° = \nexists$

Observação

tg 90° não existe.

SÉRIE IV

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

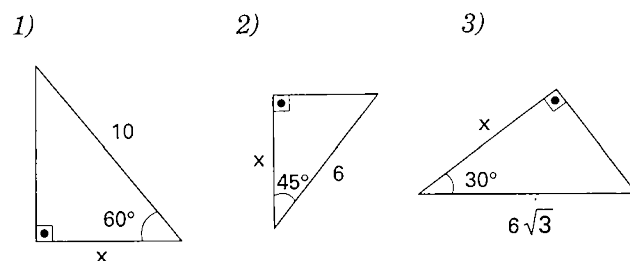
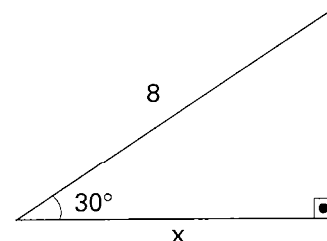
Resolução:

$\textbf{sen } 30° = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \text{sen } 30° \therefore$

$\therefore x = 8 \cdot \frac{1}{2} \therefore x = 4$

SÉRIE V

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

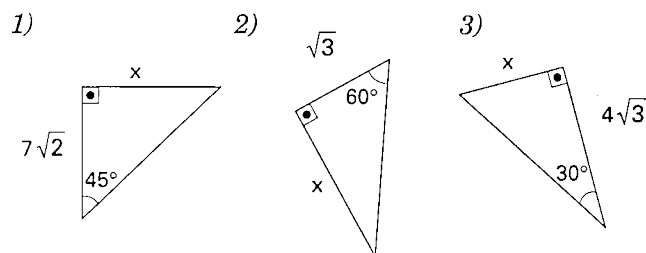
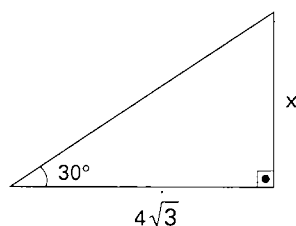
Resolução:

$\cos 30° = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \cos 30° \therefore$

$\therefore x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x = 4\sqrt{3}$

SÉRIE VI

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução:

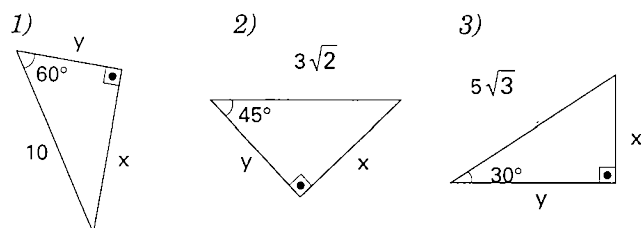
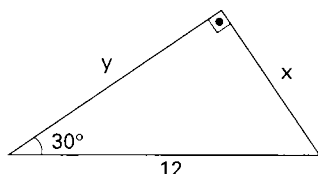
$$\textbf{tg } 30° = \frac{x}{4\sqrt{3}} \quad \therefore \quad x = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \textbf{tg } 30°$$

$$\therefore \quad x = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad x = 4 \cdot \frac{\sqrt{9}}{3} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad x = \frac{4 \cdot 3}{3} \quad \therefore \quad x = 4$$

SÉRIE VII

Em cada triângulo retângulo calcular os valores de x e y:

1) *2)* *3)*

Exemplo:

Resolução:

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{12} \quad \therefore \quad x = 12 \cdot \text{sen } 30° \quad \therefore$$

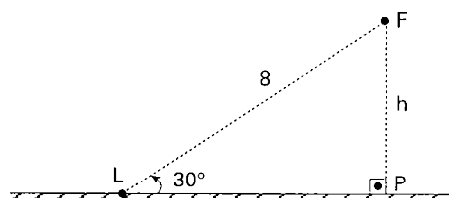
$$\therefore \quad x = 12 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x = 6$$

$$\cos 30° = \frac{y}{12} \quad \therefore \quad y = 12 \cdot \cos 30° \quad \therefore$$

$$\therefore \quad y = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad y = 6\sqrt{3}$$

SÉRIE VIII

Exemplo: Um foguete é lançado sob um ângulo de 30° em relação ao solo. Qual a sua altura quando percorreu 8km? (Supor a trajetória retilínea)

Resolução:

No ΔLPF, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{8} \quad \therefore \quad h = 8 \cdot \text{sen } 30°$$

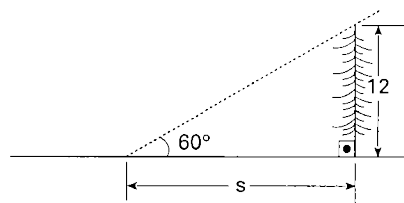
$$\therefore \quad h = 8 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore$$

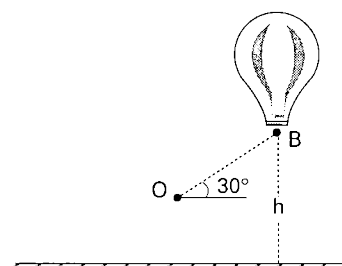
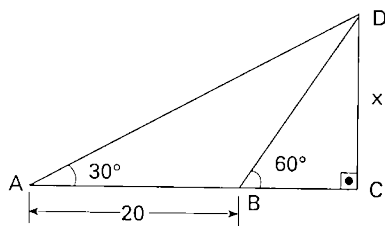
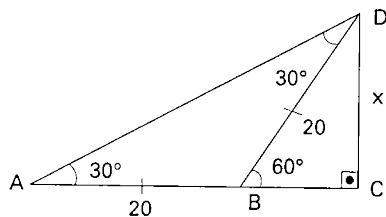
$$\therefore \quad h = 4$$

Resp.: 4km

Exercícios

1) Um foguete é lançado sob um ângulo de 45° em relação ao solo. Qual a sua distância ao ponto de lançamento quando atingir a altura de 4km? (Supor a trajetória retilínea)

2) A figura abaixo representa uma árvore de altura 12 metros. Calcular a sua sombra s quando um raio luminoso forma com o solo um ângulo de 60°.

3) Um observador O de altura 1,75m vê um balão B sob ângulo de 30° em relação ao solo. No instante em que a distância do observador ao balão é de 146,50m, calcular a altura h do balão em relação ao solo.

SÉRIE IX

Exemplo:

Resolução:

1. No Δ ABD o ângulo CBD é externo, então $\hat{D}$ + 30° = 60° ∴ $\hat{D}$ = 30 e o Δ ABD é isósceles e portanto BD = AB = 20.

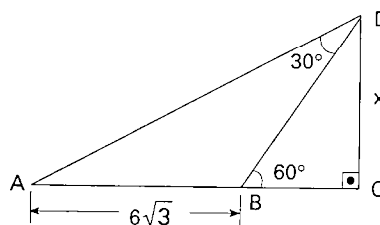
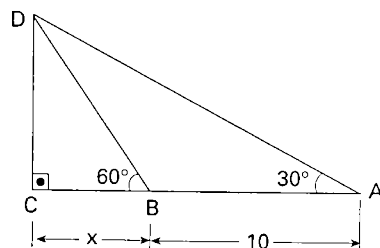
2. No Δ BCD, temos: sen 60° = $\frac{x}{20}$ ∴

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$ ∴ $x = 10\sqrt{3}$

Resp.: $x = 10\sqrt{3}$

Exercícios

Em cada figura colocar o valor de x:

1)

2)

16 *Equação do 2º Grau*

1. **Equação do 2º grau**, na incógnita x, é toda equação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

onde *a*, *b* e *c* são números reais.

Exemplos:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$; $a = 1$, $b = -4$ e $c = -5$

b) $2x^2 + 3x = 0$; $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$; $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$

2. **Fórmula resolutiva de Báskara**

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada discriminante da equação do 2º grau. Indica-se pela letra grega maiúscula Δ (lê-se: delta).

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo $\Delta \geqslant 0$ (Δ positivo ou Δ nulo), podemos escrever

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Indicamos por x_1 e x_2 as duas raízes reais, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SÉRIE I

Exemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$

1ºpasso: **Cálculo de Δ**

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

2ºpasso: **Aplicação da fórmula de Báskara**

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

S = {2, 3}

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$

2) $x^2 - x - 6 = 0$

3) $x^2 + 3x - 4 = 0$

4) $x^2 + 5x + 6 = 0$

SÉRIE II

Resolver em IR

1) $x^2 - 2x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$

3) $x^2 - 9 = 0$

4) $4x^2 - 25 = 0$

SÉRIE III

Exemplo: $x^2 - 8x + 16 = 0$

Cálculo de Δ:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 16 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

S = {4}

Nota

Sendo Δ = 0, diz-se que a equação do 2º grau tem *raiz dupla*, ou seja, $x_1 = x_2$.

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

2) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

4) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

SÉRIE IV

Exemplo: $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{array}\right\} \therefore \ \Delta = (-4)^2 - 4(3)(2) = 16 - 24 = -8$$